

# Autocorrelación serial igual a cero. Precisión para la estimación

Paula Fernández, Guillermo Vallejo y Javier Herrero  
Universidad de Oviedo

La precisión de nueve procedimientos para el cálculo de la autocorrelación ha sido evaluada en un diseño de Grupos x Ocasiones. Utilizamos seis estructuras de matrices de dispersión ( $\Sigma$ ) con ausencia de autocorrelación serial: Simetría Combinada, Huynh-Feldt, No Estructurada ( $\epsilon = .56$  y  $\epsilon = .75$ ) y de Coeficientes Aleatorios ( $\epsilon = .56$  y  $\epsilon = .75$ ). Los resultados indican que el procedimiento de Hearne, Clark y Hatch (1983) realiza una estimación ajustada independientemente del tamaño de la muestra y del número de puntos de serie salvo cuando la matriz subyacente es de Simetría Combinada o Huynh-Feldt. El resto de los estimadores dependen de  $q$  y de  $\Sigma$  y sólo los procedimientos de Jones (1985) y de Pantula y Pollock (1985) dependen significativamente del tamaño de la muestra. Los procedimientos de Wilson, Hebel y Sherwin (1981), Gill (1992) y Pantula y Pollock (1985), en este orden, son los más afectados por el maridaje ausencia de autocorrelación-ausencia de sphericidad.

*Serial autocorrelation equal to zero. Precision for the estimation.* The precision of nine procedures for the calculation of the autocorrelation was evaluated in a Groups x Occasions design. We have used six different structures of dispersion matrices ( $\Sigma$ ) that have absence of serial autocorrelation. These were: Compound Symmetric, Huynh-Feldt, Unstructured ( $\epsilon = .56$  y  $\epsilon = .75$ ) and of Random Coefficients ( $\epsilon = .56$  y  $\epsilon = .75$ ). The results show that the Hearne, Clark & Hatch (1983) procedure reaches a right estimation independently of the sample size and of the number of series points ( $q$ ) except when  $\Sigma$  is of Compound Symmetric or Huynh-Feldt. The rest of the procedures depend on  $q$  and on  $\Sigma$ , and only the Jones (1985) and Pantula & Pollock (1985) procedures depend significantly on sample size. The procedures of Wilson, Hebel & Sherwin (1981), Gill (1992) and Pantula & Pollock (1985), in this order, are the most affected by the marriage absence of autocorrelation-absence of sphericity.

Una de las estructuras que con más frecuencia adoptan los diseños de medidas repetidas es aquella que contiene un único factor A entre-sujetos (grupos) que representa una variable, bien de tratamiento bien de clasificación, con  $j=1, \dots, p$  niveles que contienen  $p$  muestras aleatorias de  $n_j$  unidades experimentales. Cada una de estas unidades experimentales es observada en un reducido número de ocasiones  $k=1, \dots, q$  (factor B intra-sujeto) resultantes de una elección sistemática de intervalos de tiempo fijos y equidistantes. Este procedimiento de recogida de datos que denominamos diseño de Grupos x Ocasiones (Fernández, Vallejo y Escudero, 2002) es susceptible de manifestar el efecto secuencial de dependencia serial. Por este motivo, y en función de la estrategia analítica que se utilice para poner a prueba las hipótesis estadísticas, es posible que la validez de conclusión estadística resulte comprometida.

Asumiendo la existencia de normalidad y homogeneidad de las matrices de dispersión, las hipótesis correspondientes a los efectos de este diseño se pueden contrastar utilizando una aproximación multivariada y/o univariada. El modelo multivariado de la varianza (AMVAR) no impone ninguna estructura a la matriz de varianza-covarianza ( $\Sigma$ ), excepto que sea definida positiva. Por este motivo,

todos los parámetros de la matriz deben ser estimados (con  $q$  medidas repetidas son  $q(q+1)/2$ ), sin embargo, si hay más medidas repetidas que grados de libertad residuales, la matriz será singular y el AMVAR no podrá ser calculado. La bondad del modelo mixto univariado de la varianza descansa en la estructura de la matriz  $\Sigma$  que, en su forma menos restrictiva, requiere la condición de sphericidad multimuestral. Si esta asunción no se cumple, podemos utilizar alguna de las estrategias que existen para calcular la desviación de la matriz de covarianza muestral del patrón requerido y proceder en consecuencia. Sin embargo, ninguna de ellas asume que la correlación entre las observaciones en distintos puntos del tiempo es una función de la distancia temporal entre ellos. Como la autocorrelación serial ( $\rho$ ) entre las puntuaciones es condición suficiente para que la matriz  $\Sigma$  no se acomode al patrón de sphericidad requerido algunos autores (Anderson, 1971; Andersen, Jensen y Schou, 1981; Azzalini, 1984; Hearne, Clark y Hatch, 1983; Pantula y Pollock, 1985; Schmitz, 1990; Jones, 1985) han propuesto modelos univariados de la varianza que tienen en cuenta la dependencia serial. No obstante, la bondad de estas últimas estrategias está determinada por la estimación previa y fiable de la autocorrelación.

Recientemente, Fernández et al., (2002) han evaluado comparativamente mediante simulación Monte Carlo la precisión de nueve estimadores diferentes del parámetro autorregresivo de primer orden en diseños de medidas repetidas. Sus resultados pusieron de relieve que los procedimientos que mejor estiman el valor del parámetro, tanto para procesos con autorregresión positiva como negativa, son:  $\rho_{HCH}$  (Hearne et al., 1983),  $\rho_J$  (Jones, 1985),  $\rho_{PP}$  (Pantula y Pollock,

Fecha recepción: 5-6-03 • Fecha aceptación: 30-9-03

Correspondencia: Paula Fernández  
Facultad de Psicología

Universidad de Oviedo  
33003 Oviedo (Spain)

E-mail: paula@pinon.ccu.uniovi.es

1985) y  $\rho_{WHS}$  (Wilson, Hebel y Sherwin, 1981). En concreto, los procedimientos  $\rho_{HCH}$  y  $\rho_{WHS}$  estiman correctamente el valor del parámetro autorregresivo con independencia del valor que toman  $q$ ,  $n_j$  y  $p$ . El procedimiento  $\rho_{pp}$  también estima correctamente el valor del parámetro con independencia de  $p$ , pero mejora sensiblemente conforme  $q$  y  $n_j$  incrementan. Por su parte, el estimador  $\rho_j$  depende tanto de  $p$  (mejor estimación cuanto menor es el valor de la autocorrelación  $|\rho|$ ), como de  $n_j$  y de  $q$ , que, si éstos incrementan, mejora notablemente la estimación para valores elevados del parámetro. Cuando la matriz de desviación es no estacionaria decreciente ningún procedimiento resulta afectado. Si es no estacionaria creciente sólo resultan afectados  $\rho_{pp}$ ,  $\rho_{WHS}$  y  $\rho_G$  (Gill, 1992), aunque de modo significativo sólo el primero. Estos autores concluyeron que cuando la matriz subyacente tiene estructuras AR(1) o ARH(1), por lo general, los procedimientos cuya estimación es robusta o cercana a la robustez y experimentan alguna variación en función de la intensidad de  $|\rho|$ , realizan mejor estimación cuanto más pequeña es ésta y mayor es  $q$ . Sólo cuando son pocos los niveles de la variable intra y  $|\rho|$  es elevada, el tamaño de la muestra es un factor determinante.

¿Cómo se comportan estos estimadores cuando no existe dependencia serial? ¿Estiman que la autocorrelación es cero –o sólo se aproximan– cuando no existe autocorrelación serial de primer orden? La ausencia de autocorrelación puede estar o no acompañada de esfericidad, ¿la estimación se modifica en función de la desviación de esta asunción? El comportamiento de los procedimientos cuya estimación era más ajustada cuanto menor era el valor del parámetro, ¿es mejor ahora? Todas estas cuestiones no fueron abordadas por Fernández et al., (2002) y aún permanecen abiertas.

### Método

#### Breve definición de los estimadores

#### Estimadores máximo verosímiles:

- $\rho_{HCH}$ : Hearne y otros, (1983), basándose en el trabajo de Koopmans (1942) derivaron la siguiente expresión para el cálculo MLE de  $\rho$ .  
 $(1-1/q)A_2\rho^3 - (1-2/q)A_1\rho^2 - \{(1+1/q)A_2 + A_3/q\}\rho + A_1 = 0$  (1)  
 $\rho$  es la raíz real más cercana a  $A_1/(A_2 + A_3)$  que resulta de resolver (1). Siendo  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$

$$A_1 = \sum_{j=1}^p (n_j / n_j - 1) \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{k=2}^q y_{ijk} y_i (k-1) j$$

$$A_2 = \sum_{j=1}^p (n_j / n_j - 1) \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{k=2}^{q-1} y_{ijk}^2$$

$$A_3 = \sum_{j=1}^p (n_j / n_j - 1) \sum_{i=1}^{n_j} (y_{i1}^2 \text{ y } y_{ijk}^2)$$

- $\rho_j$ : Jones (1985) propone para la estimación MLE el valor de  $\rho$  ( $-0.99 \leq \rho < 0.99$ ) que minimiza la expresión  $L(\rho) = -2 \ln$  (verosimilitud). La fórmula para  $L(\rho)$  depende del tamaño relativo entre las sumas de cuadrados del error entre sujetos ( $SC_E$ ) e intra sujetos ( $SC_I$ ) calculados corrigiendo el valor de la autocorrelación como sigue:

Si  $(q-1) SC_E \geq SC_I$ , entonces  $L(\rho) = N[(q-1) \ln (SC_I/N(q-1)) + \ln(SC_E/N) - \ln(1-\rho^2)]$

Si  $(q-1) SC_E < SC_I$ , entonces  $L(\rho) = N[q \ln ((SC_E + SC_I)/Nq) - \ln(1-\rho^2)]$

#### Estimadores de momentos:

- $\rho_{AJS}$ : Desarrollado por Bartlett (1956) y expuesto por Andersen y otros (1981).

$$\hat{\rho} = \frac{1}{q} + \left(1 - \frac{2}{q}\right) \bar{C}_1^N / \bar{C}_0^N$$

$$\bar{C}_h^N = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N C_h^N(i)$$

$$\bar{C}_h^N(i) = \frac{1}{q-h} \sum_{k=1}^{q-h} y_{ijk} y_{ijk+h}$$
(2)

- $\rho_{ABD}$ : Azzalini y Browman (1990) realizan una extensión del estimador que Daniels (1956) propuso para  $n > 1$ .

$$\hat{\rho} = \frac{2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^p \sum_{k=2}^q y_{ijk} y_{ijk-1}}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^p \sum_{k=2}^q (y_{ijk}^2 + y_{ijk-1}^2)}$$
(3)

- $\rho_{AB}$ : Azzalini y Browman (1990) proveen una corrección para la estimación anterior

$$\hat{\rho} = \left( \frac{\hat{\rho}_{ABD} + C}{1 - C}, 1 \right)$$
(4)

donde  $C = (q-1)^{-1}$

- $\rho_{pp}$ : Pantula y Pollock (1985)

$$\hat{\rho} = \frac{(Nq - 2N)^{-1} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{q-2} y_{ij} (y_{i,k+1} - y_{i,k+2})}{(Nq - 2N)^{-1} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{q-2} y_{ij} (y_{ik} - y_{i,k+1})}$$
(5)

- $\rho_G$ : Gill (1992)

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{q-1} y_{ik} y_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{q-1} y_{ik}^2}$$
(6)

Para estimar  $\rho$ , los procedimientos  $\rho_{HCH}$ ,  $\rho_j$  y  $\rho_{pp}$  utilizan el error entre sujetos y,  $\rho_{AJS}$ ,  $\rho_{ABD}$ ,  $\rho_{AB}$ , y  $\rho_G$  el error intra sujetos, indicado por  $y_{ijk}$  indistintamente.

- $\rho_{WHS}$ : Wilson, Hebel y Sherwin, (1981) desarrollan una estimación para el cálculo de la autocorrelación de orden uno que denominan subóptima, donde,

$$S_{2,1,i}^2 = \frac{1}{q-1} \sum_{k=1}^{q-1} S_{2,1,k}^2$$

$$S_{3,1,i}^2 = \frac{1}{q-2} \sum_{k=1}^{q-2} S_{3,1,k}^2$$

son respectivamente, el promedio de todas las posibles varianzas que pueden ser calculadas desde dos observaciones adyacentes, y el promedio de todas las posibles varianzas que pueden ser calculadas desde tres observaciones contiguas espaciadas dos unidades de tiempo dentro de un individuo. El promedio para el conjunto de individuos es  $S^2_{2,1,...}$  y  $S^2_{3,1,...}$ . Entonces:

$$\hat{\rho} = 3(S^2_{3,1,...} / S^2_{2,1,...} - 1) \quad (7)$$

- $\rho_{AFD}$ : Azzalini y Frigo (1991) ofrecen también una extensión del procedimiento de Daniels (1956) para  $n > 1$  utilizando las puntuaciones directas ( $x_{ijk}$ ) en lugar de los residuales ( $y_{ijk}$ ).

$$\hat{\rho} = \frac{2d_{12} - b}{d_{11} + d_{22} - b} \quad (8)$$

donde,

$$d_{rs} = \sum_{i=1}^N \sum_{k=r-s}^{q-r+1} X_{ijk} X_{ijk+r-s}$$

$$d_r = \left( \sum_{k=r}^{q-r+1} X_{ik}, \dots, \sum_{k=r}^{q-r+1} X_{nk} \right)$$

$$b = \{2(q-1)\}^{-1} (d_1 + d_2) x'(x'x)^{-1} x'(d_1 + d_2)$$

siendo X la matriz de identidad de orden N

Con la intención de examinar lo expresado anteriormente en la introducción, realizamos un estudio Monte Carlo con datos generados desde distribuciones normales multivariadas. Cuatro variables fueron manipuladas: (a) tamaños de las muestras ( $n_j$ ), (b) ocasiones de medida (q), (c) estructura de la matriz de covarianza de la población ( $\Sigma$ ), y (d) grado de heterogeneidad entre las matrices de covarianza (GHE). Los resultados se refieren a un diseño balanceado de Grupos x Ocasiones y se exponen articulados de acuerdo a la ausencia de autocorrelación serial (NR) para las [q,  $n_j(N)$ , GHE, NR]=[4x3x4x6]=288 condiciones experimentales que resultan de manipular las variables indicadas entre corchetes. A saber, q=4, 6, 8 y 12 niveles del factor intra-sujeto (ocasiones de medida);  $n_j = 5, 10$  y 16 son los tamaños de los vectores de observaciones en cada uno de los 3 grupos, por lo tanto, los tamaños de muestra totales (N) son 15, 30 y 48 respectivamente.

Seis son las estructuras de matrices de dispersión con ausencia de autocorrelación serial que hemos utilizado, a saber: Simetría Combinada (SC), Huynh-Feldt (HF), Coeficientes Aleatorios (CA) ( $\epsilon=.56$  y  $\epsilon=.75$ ) y No estructurada (NE) ( $\epsilon=.56$  y  $\epsilon=.75$ ). La matriz de SC disfruta de varianzas y covarianzas constantes. En concreto ha sido construida desde la expresión  $E_{qq} = A + \lambda I_k$  donde A es una matriz (qxq) con todos sus elementos iguales, I es la matriz identidad y  $\lambda$  es una constante arbitraria, que en un caso particular depende de la relación entre los tratamientos, la escala de medida, así como de las varianzas y covarianzas. En nuestro caso  $\lambda=10$ . La matriz HF es más general que la matriz SC. Satisface la propiedad  $\sigma^2_{kk} + \sigma^2_{k'k'} - 2\sigma_{kk'} = 2\lambda$ . Tiene un diseño generado de la misma forma que SC salvo que  $A_{qq}$  es ahora una matriz de columnas iguales donde cada uno de los elementos son ordinalmente diferentes. La matriz NE es una matriz simétrica donde las varianzas como las covarianzas varían sin ninguna estructura definida. CA fué construida desde la expresión  $E_{qq} = Z \Phi Z' + \sigma^2 I$

(Jennrich y Schluchter, 1986) donde Z es una matriz conocida qxr siendo unos la primera columna.  $\Phi$  es una matriz de dispersión rxr que en nuestro caso fue no estructurada (Laird y Ware, 1982).

La estructura de la matriz de SC es homogénea porque las varianzas y covarianzas son constantes. Por otra parte, las matrices HF, CA y NE exhiben heterogeneidad intrasujeto (Littell, Milliken, Stroup y Wolfinger, 1996; Wolfinger, 1996) y por tanto las varianzas varían para cada observación (q) aunque no de igual forma. En la matriz HF las varianzas y covarianzas crecen proporcionalmente, mientras que en las matrices CA y NE las varianzas y covarianzas varían sin ninguna estructura definida.

Todas estas matrices manifiestan ausencia de autocorrelación serial, pero en modo diferente. En la matriz SC la correlación es constante, es decir, las variables aleatorias del modelo están igualmente correlacionadas para todos los pares de observaciones de cada sujeto. La matriz HF tiene una estructura especial de correlación. La correlación entre dos puntos igualmente distantes es moderadamente creciente (disminuyendo en intensidad) a medida que el par está más lejos en la serie. Por otra parte, la correlación entre dos ocasiones de observación se incrementa proporcionalmente conforme éstas se alejan en el tiempo. En ambas, SC y HF, se satisface la asunción de esfericidad y por lo tanto  $\epsilon=1$ . En las matrices CA y NE la correlación entre las diferentes medidas (q) es arbitraria y por este motivo carecen de esfericidad. En la construcción de estas últimas utilizamos el algoritmo desarrollado por Cornell, Young y Bratcher (1991) para que presenten desviación de la esfericidad moderada ( $\epsilon=0.75$ ) y grave ( $\epsilon=0.56$ ).

Con cada una de las estructuras precedentes utilizamos iguales y diferentes matrices de dispersión para el factor entre sujetos (GHE) que proveen situaciones desde la homogeneidad ortodoxa hasta una elevada violación de esta asunción. Las razones construidas fueron: (1:1:1), (1:1.5:2), (1:2:3) y (1:3:5).

A continuación, vectores  $Z_{ij}$  de variadas normales [ $N \sim (N, \sigma^2) = N \sim (0,1)$ ] fueron generados mediante el algoritmo de Kinderman y Ramage (1976) implementado en el programa GAUSS (Aptech Systems, 1997, V. 3.2.32). Los vectores de observaciones pseudoaleatorios  $y'_{ij1}, \dots, y'_{ijq}$  con matriz de varianzas-covarianzas  $\Sigma$  fueron obtenidos a través del método de Schauer and Stoller (1966), esto es  $Y'_{ij} = T Z_{ij}$ , donde T es la factorización de Cholesky de  $\Sigma_j$ .

El programa de simulación fue escrito en el lenguaje de programación GAUSS (1997). 10.000 replicaciones de cada condición fueron ejecutadas para cada uno de los nueve procedimientos.

## Resultados

Las pruebas de significación que descansan en la independencia de las observaciones son sensibles a pequeñas desviaciones de la ausencia de autocorrelación serial. Por esta razón, se presupone que el contraste de las hipótesis resulte perjudicado cuando se estiman pequeñas autocorrelaciones que no existen, y se utilice en consecuencia, alguna estrategia que pretenda su corrección. En virtud de ello, el criterio de robustez que consideramos para evaluar las condiciones particulares bajo las cuales los diferentes procedimientos de cálculo son insensibles a la estructura subyacente de no autocorrelación serial de primer orden, a la razón  $n_j/q$  y a la violación de la asunción de homogeneidad de las matrices de covarianza entre grupos, es que el sesgo empírico (SE) no exceda de .07.

$$SE = (\hat{\rho} - \rho) \leq .07$$

Consideramos que un procedimiento es ajustado si la estimación empírica (EE) está contenida en el intervalo  $\rho \pm .02$ . A pesar de que no existe una regla universal para este cometido esta medida cuantitativa ha sido considerada en el ámbito de las series temporales cortas (ver Arnau, 1999), y en nuestra opinión, constituye un criterio adecuado para juzgar la robustez.

En las tablas que siguen presentamos los resultados para un subconjunto seleccionado de combinaciones investigadas que muestran adecuadamente las diferencias que existen entre los procedimientos con respecto a la estimación empírica de  $\rho$ .  $\rho_G$ ,  $\rho_{ABD}$  y  $\rho_{AFD}$  manifestaron un comportamiento muy similar en su EE, con diferencias entre ellos inferiores a .02, razón por la que decidimos exponer sólo la estimación para el procedimiento  $\rho_G$ . Tampoco presentamos los resultados en condición de heterogeneidad entre grupos porque ningún procedimiento resultó afectado por esta razón en ninguna de las condiciones estudiadas. Esto es esperable si tenemos en cuenta que las matrices son proporcionales, y por ende, tienen la misma estructura.

*EEp para matrices de dispersión con estructuras de SC y de HF.*  $\varepsilon = 1$  (Tabla 1)

El procedimiento  $\rho_{HCH}$  manifiesta una estimación liberal en la misma cuantía para cualquier razón  $n_j/q$  si la matriz subyacente a los datos es de SC. Cuando la matriz tiene estructura HF la estimación es liberalmente creciente en función de  $q$ , pero invariable con respecto a  $n_j$ .

$\rho_J$  experimenta una estimación liberal si la matriz de dispersión es de SC cuando  $q < 6$  y  $n_j \leq 10$ , de otro modo el comportamiento es robusto y ajustado. Cuando la matriz subyacente es de Tipo HF la estimación sólo es liberal para  $q = 4$  independientemente de  $n_j$ . En otras situaciones el procedimiento se comporta de modo robusto y ajustado.

$\rho_{AJS}$  exhibe robustez siempre que  $q \geq 6$  y se ajusta cuando  $q \geq 8$  independientemente del tamaño de la muestra.

$\rho_G$ ,  $\rho_{ABD}$  y  $\rho_{AFD}$  se muestran robustos y ajustados para  $q = 12$ , de otro modo son muy conservadores, en mayor medida cuanto menor es  $q$ . No dependen de  $n_j$ .

$\rho_{AB}$ ,  $\rho_{PP}$  y  $\rho_{WHS}$  estiman de modo robusto y ajustado para cualquier razón  $n_j/q$ .

*EEp para matrices de dispersión con estructura NE* ( $\varepsilon = .75$  y  $\varepsilon = .56$ ) (Tabla 2)

Cuando  $\varepsilon = .75$  y  $q = 4$  todos los procedimientos, sobre todo  $\rho_{AB}$ ,  $\rho_{PP}$  y  $\rho_{WHS}$ , y con independencia del tamaño de muestra, están lejos de alcanzar la robustez. Si  $q \geq 6$  los procedimientos  $\rho_{HCH}$ ,  $\rho_J$ ,  $\rho_{AJS}$  y  $\rho_{AB}$  manifiestan un comportamiento ajustado y  $\rho_{WHS}$  robusto para toda razón  $n_j/q$ .

$\rho_{AB}$  es robusto para la razón  $n_j/q = 5/6$  y ajustado de otro modo.

$\rho_G$ ,  $\rho_{ABD}$  y  $\rho_{AFD}$  exhiben un comportamiento conservador para  $q \leq 6$  y  $n_j \leq 10$ , robusto para  $q = 8$  y ajustado si  $q = 12$ .

Cuando  $\varepsilon = .56$  el comportamiento anterior se agrava levemente si  $q = 4$  para todos los procedimientos. Cuando la razón  $n_j/q$  es  $5/6$ ,  $\rho_{AJS}$  y  $\rho_{PP}$  resultaron levemente más liberales aunque no abandonan la robustez. El comportamiento de  $\rho_G$ ,  $\rho_{ABD}$  y  $\rho_{AFD}$  también es levemente más liberal aunque no de modo significativo con respecto a  $\varepsilon = .75$ . El procedimiento  $\rho_{WHS}$  es el más afectado al incrementarse la desviación de la esfericidad, manifestándose conservador para todo  $q$  y  $n_j$ .

*EEp para matrices de dispersión con estructura de CA* ( $\varepsilon = .75$  y  $\varepsilon = .56$ ) (Tabla 3)

Cuando  $\varepsilon = .75$  los procedimientos  $\rho_{HCH}$  y  $\rho_{AB}$  tienen un comportamiento robusto y ajustado para toda razón  $n_j/q$  que no se modifica cuando la desviación de la esfericidad es mayor.  $\rho_J$ ,  $\rho_{AJS}$  y  $\rho_{PP}$ , en este orden de mejor a peor, manifiestan un comportamiento similar, y al menos robusto, para toda razón  $n_j/q$ .  $\rho_I$  se ajusta siempre para  $q \geq 6$  y para la razón  $n_j/q = 16/4$ . La estimación de  $\rho_{AJS}$  y  $\rho_{PP}$  es ajustada siempre que  $q \geq 8$  y el primero también para la ra-

Tabla 1  
Estimación empírica de la autocorrelación. Matrices de covarianza ( $\Sigma$ ): Simetría Combinada y Huynh-Feldt

$\Sigma =$ Simetría Combinada												
$n_j$ $q$	5				10				16			
	4	6	8	12	4	6	8	12	4	6	8	12
$\rho_{HCH}$	.28	.28	.28	.28	.28	.28	.28	.28	.28	.28	.28	.28
$\rho_J$	.13	.12	.00	.00	.11	.10	.00	.00	.10	.01	.00	.00
$\rho_{AJS}$	-.12	-.05	.00	.00	-.12	-.05	.00	.00	-.12	-.05	.00	.00
$\rho_{AB}$	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00
$\rho_{PP}$	.03	.01	.00	.00	.01	.00	-.01	.00	.01	.00	-.00	.00
$\rho_G$	-.33	-.19	-.14	.00	-.33	-.19	-.14	.00	-.33	-.19	-.14	.00
$\rho_{WHS}$	-.02	.01	.00	.00	.01	.00	.00	.00	-.01	.00	-.00	.00
$\Sigma =$ Huynh-Feldt												
$\rho_{HCH}$	.39	.45	.49	.59	.39	.46	.50	.58	.39	.46	.51	.59
$\rho_J$	.08	.02	.00	.00	.08	.01	.00	.00	.08	-.00	.00	.00
$\rho_{AJS}$	-.11	-.05	.00	.00	-.12	-.05	.00	.00	-.12	-.00	-.00	.00
$\rho_{AB}$	.01	-.00	.00	.00	-.00	.00	.00	.00	-.00	.00	.00	.00
$\rho_{PP}$	-.03	-.02	-.02	.00	-.02	-.02	.00	.00	-.02	-.00	-.00	.00
$\rho_G$	-.32	-.20	-.14	.00	-.33	-.19	-.11	.00	-.33	-.19	-.10	.00
$\rho_{WHS}$	.03	.01	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	-.00	.00

Nota. Negrita= comportamiento ajustado. Cursiva= comportamiento robusto. Comportamiento no robusto el resto de los casos. Ver introducción para la definición de los estimadores.

zón  $n_j/q = 10/6$ . Cuando  $\varepsilon = .56$  estas estimaciones se tornan conservadoras y pierden la robustez como sigue:  $\rho_J$  para la razón  $n_j/q = 5/4$ ,  $\rho_{AJS}$  para las razones  $5/4$  y  $10/4$  y  $\rho_{PP}$  siempre para  $q \leq 6$ .

$\rho_G$ ,  $\rho_{ABD}$  y  $\rho_{AFD}$  realizan una estimación ajustada para  $q = 12$ , conservadora de otro modo, en mayor medida cuanto menor es. Este comportamiento se agrava para  $\varepsilon = .56$  aunque sin modificar significativamente los resultados anteriores.

$\rho_{WHS}$  es robusto sólo si  $q = 12$  y  $\varepsilon = .75$ ; cuando  $\varepsilon = .56$  pierde la robustez. Para otros niveles de  $q$  es conservador, en mayor medida cuanto menor es  $q$ , aunque menos que  $\rho_G$ ,  $\rho_{ABD}$  y  $\rho_{AFD}$ . Estos cuatro últimos estimadores son insensibles al tamaño de la muestra.

## Discusión y conclusiones

El procedimiento  $MLE_{\rho_{HCH}}$  que realizaba una estimación ajustada independientemente de  $\rho$ ,  $n_j$  y  $q$  cuando la matriz de dispersión subyacente a los datos era AR(1) y ARH(1) (Fernández et al., 2002) conserva esta virtud cuando la matriz de dispersión que subyace a los datos es NE (si  $q > 4$ ) y de CA, pero no si es de tipo SC o H-F. La estimación empírica que realiza bajo estas dos condiciones coinciden con la media de las correlaciones entre todos los puntos distanciados una unidad de tiempo. Cuando la matriz subyacente es del tipo SC toma el mismo valor con independencia de

Tabla 2  
Estimación empírica de la autocorrelación. Matrices de covarianza ( $\Sigma$ ): No Estructurada ( $\varepsilon = .75$ ) y No Estructurada ( $\varepsilon = .56$ )

$\Sigma =$ No Estructurada; $\varepsilon = .75$												
$n_j$ $q$	5				10				16			
	4	6	8	12	4	6	8	12	4	6	8	12
$\rho_{HCH}$	.12	<b>-.00</b>	.00	.00	.12	.00	.00	.00	.12	.00	.00	.00
$\rho_J$	.13	.00	.00	.00	.12	.00	.00	.00	.12	.00	.00	.00
$\rho_{AJS}$	.14	<b>.02</b>	.00	.00	.14	.00	.00	.00	.13	.00	.00	.00
$\rho_{AB}$	.34	.03	.00	.00	.34	.00	.00	.00	.33	.00	.00	.00
$\rho_{PP}$	.34	<b>-.02</b>	.00	.00	.31	.00	.00	.00	.31	<b>-.00</b>	.00	.00
$\rho_G$	-.11	-.11	-.03	.00	-.11	-.09	<b>-.02</b>	.00	-.10	<b>-.01</b>	.00	.00
$\rho_{WHS}$	.39	-.05	-.04	-.05	.37	-.06	-.05	-.06	.38	-.06	-.06	.06
$\Sigma =$ No Estructurada; $\varepsilon = .56$												
$\rho_{HCH}$	.16	<b>.01</b>	.00	.00	.16	.00	.00	.00	.16	<b>.01</b>	.00	.00
$\rho_J$	.16	<b>.01</b>	.00	.00	.16	.00	.00	.00	.16	<b>.01</b>	.00	.00
$\rho_{AJS}$	.21	.05	.00	.00	.22	.00	.00	.00	.22	.00	.00	.00
$\rho_{AB}$	.44	.05	.00	.00	.45	.00	.00	.00	.47	<b>-.00</b>	.00	.00
$\rho_{PP}$	.59	-.05	.00	.00	.57	<b>-.00</b>	.00	.00	.56	<b>-.00</b>	.00	.00
$\rho_G$	-.14	-.12	-.05	.00	-.11	-.08	-.04	.00	-.10	<b>-.02</b>	.00	.00
$\rho_{WHS}$	.54	-.12	-.10	-.09	.53	-.12	-.10	-.10	.53	-.12	-.11	.10

Nota. Negrita= comportamiento ajustado. Cursiva= comportamiento robusto. Comportamiento no robusto el resto de los casos. Ver introducción para la definición de los estimadores.

Tabla 3  
Estimación empírica de la autocorrelación. Matrices de covarianza ( $\Sigma$ ): Coeficientes Aleatorios ( $\varepsilon = .75$ ) y Coeficientes Aleatorios ( $\varepsilon = .56$ )

$\Sigma =$ Coeficientes Aleatorios; $\varepsilon = .75$												
$n_j$ $q$	5				10				16			
	4	6	8	12	4	6	8	12	4	6	8	12
$\rho_{HCH}$	<b>-.00</b>	<b>-.00</b>	.00	.00	<b>-.00</b>	.00	.00	.00	<b>-.00</b>	<b>-.00</b>	<b>-.00</b>	.00
$\rho_J$	.05	.00	.00	.00	-.03	.00	.00	.00	<b>-.02</b>	<b>-.00</b>	.00	.00
$\rho_{AJS}$	-.07	-.03	.00	.00	-.06	.00	.00	.00	-.06	<b>-.00</b>	.00	.00
$\rho_{AB}$	<b>.00</b>	<b>-.00</b>	.00	.00	.00	.00	.00	.00	<b>-.00</b>	<b>-.00</b>	.00	.00
$\rho_{PP}$	-.06	.06	.00	.00	-.05	.05	.00	.00	-.05	-.03	<b>-.00</b>	.00
$\rho_G$	-.42	-.23	-.15	.00	-.42	-.23	-.16	.00	-.42	-.23	-.16	.00
$\rho_{WHS}$	-.13	-.12	-.10	-.07	-.13	-.13	-.10	-.06	-.13	-.12	-.10	-.06
$\Sigma =$ Coeficientes Aleatorios; $\varepsilon = .56$												
$\rho_{HCH}$	<b>-.01</b>	<b>-.01</b>	.00	.00	<b>-.00</b>	.00	.00	.00	<b>-.00</b>	<b>-.00</b>	.00	.00
$\rho_J$	-.08	<b>-.02</b>	.00	.00	-.06	.00	.00	.00	-.03	<b>-.00</b>	.00	.00
$\rho_{AJS}$	-.09	-.04	.00	.00	-.08	.00	.00	.00	-.06	<b>-.00</b>	.00	.00
$\rho_{AB}$	<b>.00</b>	<b>.00</b>	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	<b>-.00</b>	.00	.00
$\rho_{PP}$	-.10	-.08	.00	.00	-.08	-.07	.00	.00	-.06	-.06	<b>-.00</b>	.00
$\rho_G$	-.47	-.25	-.16	.00	-.47	-.25	-.16	.00	-.47	-.25	-.16	.00
$\rho_{WHS}$	-.18	-.17	-.15	-.11	-.18	-.17	-.15	-.10	-.18	-.18	-.15	-.08

Nota. Negrita= comportamiento ajustado. Cursiva= comportamiento robusto. Comportamiento no robusto el resto de los casos. Ver introducción para la definición de los estimadores.

q dado que la correlación es constante entre cualquier par de observaciones, mientras que se incrementa en función de q cuando la matriz es del tipo HF.

Con respecto al procedimiento MLE  $\rho_j$ , los autores anteriormente citados concluyeron que era un procedimiento ligado al valor del parámetro. En concreto, cuanto menor era la intensidad de la autocorrelación serial, independientemente de si la dirección era positiva o negativa, mejor era la estimación. El comportamiento eficiente para elevados valores del parámetro dependía tanto de q como del tamaño de muestra. Así las cosas, esperábamos que  $r_j$  mostrase un comportamiento ajustado en condiciones de ausencia de autocorrelación, sin embargo observamos que sigue muy ligado al tamaño de la muestra y a la cantidad de puntos de serie. Exhibe un comportamiento ajustado siempre que  $q \geq 6$ , excepto cuando la estructura de la matriz es de SC. En este caso, para  $q = 6$  necesita para alcanzar la robustez un tamaño de 16 sujetos para cada grupo. Cuando  $q = 4$  sólo alcanza la robustez si la matriz subyacente es de CA ajustándose para estos niveles ( $q = 4$  o  $6$ ) conforme el tamaño de muestra incrementa.

Los procedimientos  $\rho_{AB}$ ,  $\rho_{AJS}$ ,  $\rho_G$ ,  $\rho_{ABD}$  y  $\rho_{AFD}$ , que en Fernández et al. (2002) mostraban su mejor comportamiento cuanto menor era  $|\rho|$  y que no dependían del tamaño de muestra, se comportan según lo esperado.  $\rho_{AB}$  y  $\rho_{AJS}$  estiman ambos correctamente, mejor el primero (Azzalini y Frigo, 1991), salvo cuando la matriz de desviación es NE y  $q = 4$ .  $\rho_{AJS}$  manifiesta también mal comportamiento cuando la matriz es de CA,  $q = 4$  y  $n_j \leq 10$ .

$\rho_G$ ,  $\rho_{ABD}$  y  $\rho_{AFD}$  se comportan en el modo esperado. La estimación es conservadora (negativa) que, aunque en menor medida que lo era en presencia de autocorrelación de primer orden (Fernández et al., 2002) es inaceptable. En su defensa debemos señalar que su comportamiento es robusto si  $q \geq 8$  para la matriz NE y ajustado para  $q = 12$  en el resto de las condiciones aquí estudiadas. También en esta nueva situación dependen, al igual que encontraron los autores anteriormente referenciados de q, pero no de  $n_j$ .

Azzalini y Frigo (1991) muestran la estimación de los procedimientos  $\rho_{ABD}$  y  $\rho_{AJS}$  cuando el valor del parámetro es cero ( $\rho = 0$ ) –sin especificar cómo es la estructura de la matriz–. Podemos advertir que tiene un mejor comportamiento  $\rho_{AJS}$  que  $\rho_{ABD}$  y más, cuanto mayor es q, sin influir en absoluto  $n_j$ . Estos resultados coinciden plenamente con los resultados presentados por nosotros cuando las matrices de dispersión son SC y H-F.

$\rho_{PP}$  se comporta de modo similar a  $\rho_{AB}$ , robusto y ajustado en función de q y  $n_j$ , salvo cuando la matriz subyacente tiene una estructura CA,  $\epsilon = .56$  y  $q \leq 6$ , en cualquier caso mejor que  $\rho_{AJS}$ , en desacuerdo con los resultados reportados por Pantula y Pollock (1985). Al igual que encontraron Fernández et al. (2002) depende  $n_j$  para  $q = 4$  y  $q = 6$ .

El procedimiento  $\rho_{WHS}$  no se comporta de modo regular como hacía en presencia de autocorrelación de primer orden (Fernández et al., 2002), sino que varía en función de qué estructura de no autocorrelación serial es la que subyace a los datos. La estimación es ajustada si la matriz de dispersión es de SC y de H-F; robusta si es de tipo NE y  $\epsilon = .75$ , y muy deficiente en el resto de las situaciones investigadas.

En contra de lo expresado por Azzalini y Browman (1991) y de acuerdo con Fernández et al. (2002), ni  $\rho_{AB}$  ni  $\rho_{AFD}$  mejoran de modo significativo cuando incrementa el tamaño de la muestra. Son  $\rho_j$  y  $\rho_{PP}$  los estimadores que más dependen de esta variable, lo mismo que sucedía en presencia de autocorrelación serial de primer orden como expresaron los últimos autores mencionados.

Todos estos estimadores son sensibles al maridaje ausencia de autocorrelación-ausencia de esfericidad, siendo los procedimientos más afectados  $\rho_{WHS}$ ,  $\rho_G$ ,  $\rho_{ABD}$ ,  $\rho_{AFD}$  y  $\rho_{PP}$  (en este orden). Precisamente, éstos eran los más sensibles a la heteroscedasticidad intragrupo en el estudio realizado por Fernández et al. (2002).

Coincidimos plenamente con lo expresado por Fernández et al. (2002) en que la estimación no es más acertada cuando el cálculo se realiza desde residuales que desde puntuaciones directas.

Una próxima investigación debería examinar, de una parte, si el procedimiento  $\rho_{HCH}$  una vez realizadas las estimaciones MLE de  $\rho$  y  $\sigma^2$  bajo la  $H_0$  y ejecutada la prueba de razón de verosimilitud asociada (Hearne et al., 1983) es suficientemente robusto para decidir que no existe autocorrelación de primer orden cuando la matriz de desviación subyacente a los datos es SC y H-F. De otra parte, debería examinar cómo se comportan estos procedimientos cuando las matrices subyacentes son las aquí utilizadas pero el diseño es no balanceado y cuando la distribución es no normal, al igual que hicieran Fernández y Vallejo (2002) cuando la matriz subyacente es autorregresiva de primer orden. Si las dos condiciones anteriores son satisfactorias, el procedimiento  $\rho_{HCH}$  sería el estimador más estable y eficiente para detectar la dirección e intensidad de la autocorrelación de primer orden en diseños de Grupos x Ocasiones de medidas repetidas. Así las cosas, una próxima investigación completaría a estas anteriores: ¿qué procedimiento de aquellos que pretenden corregir la autocorrelación serial de primer orden cuando la matriz subyacente a los datos tiene este patrón es más robusto y tiene mayor potencia?. Ambas investigaciones ya están en marcha.

#### Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con la ayuda concedida por el MCT-2001-BOS-0410.

#### Referencias

- Andersen, A.H. Jensen, E.B. y Schou, G. (1981). Two-way analysis of variance with autocorrelated errors. *International Statistical Review* 49, 153-157.
- Anderson, T.W. (1971). *The Statistical Analysis of Time Series*. New York: Wiley.
- Arnau, J. (1999). Reducción del sesgo en la estimación de la autocorrelación en series temporales cortas. *Metodología de las ciencias del comportamiento* 1(1), 25-37.
- Azzalini, A. (1984). Estimation and hypothesis testing for collections of autoregressive time series. *Biometrika* 71, 85-90. Correction: 74 (1987), 667.
- Azzalini, A. y Browman, A. (1990). Nonparametric regression methods for repeated measurements. En G.G. Roussas (ED.). *Nonparametric Functional Estimation*. Kluwer Academic Publisher.
- Azzalini, A. y Frigo, A.C. (1991). An explicit nearly unbiased estimate of the AR(1) parameter for repeated measurements. *Journal Time Series Analysis* 12(4), 273-281.
- Bartlett, M.S. (1956). *An Introduction to Stochastic Processes with Special Reference to Methods and Applications*. Cambridge University Press.
- Cornell, J.E., Young, D.M. y Bratcher, T.L. (1991). An algorithm for generating covariance matrices with specified departures from sp-

- hericity. *Journal of Statistical Computation and Simulation* 34, 240-243.
- Daniels, H.E (1956). The aproximate distribution of serial correlation coefficients. *Biometrika* 43, 169-185.
- Fernández, P., Vallejo, G y Escudero, J.R. (2002). Diagnóstico de la precisión de nueve procedimientos para el cómputo de la autocorrelación de primer orden en un diseño de Sujetos x Ocasiones (3xq). *Psicothema*, 14 (2), 497-503.
- Fernández, P. y Vallejo, G (2002). Ausencia de normalidad y desigualdad del tamaño de los grupos. ¿Afecta a la estimación de la autocorrelación? *Psicothema* 14(4), 861-869.
- GAUSS. (1997). *The Gauss System*. (Vers. 3.2.32). Washington: Aptech Systems, Inc.
- Gill, P.S. (1992). A note on modelling the covariance structure of repeated measurements. *Biometrics* 48, 965-968.
- Hearne, E.M., Clark, G.M. y Hatch, J.P. (1983). A test for serial correlation in univariate repeated-measures analysis. *Biometrics* 39, 237-243.
- Jennrich, R.I. y Schluchter, M.D. (1986). Unbalanced repeated-measures models with structured covariance matrices. *Biometrics* 42, 805-820.
- Jones, R.H. (1985). Repeated measures, interventions, and time series analysis. *Psychoneuroendocrinology* 10(1), 5-14.
- Kindeman, A.J. y Ramage, J.G. (1976). Computer generation of normal random numbers. *Journal of American Statistical Association* 77, 893-896.
- Koopmans, T. (1942). Serial correlation and quadratic forms in normal variables. *Annals of Mathematical Statistic* 13, 14.
- Laird, N.M. y Ware, J.H. (1982). Random-effects models for longitudinal data. *Biometrics* 38, 963-974.
- Littell, R.C., Milliken, G.A., Stroup, W.W. y Wolfinger, R.D. (1996). SAS system for mixed models, Cary, NC: SAS Institute.
- Pantula, S.G. y Pollock, K.H. (1985). Nested analysis of variance with autocorrelated errors. *Biometrics* 37, 909-920.
- Schauer, E.M. y Stoller, D.S. (1966). On the generation of normal random vectors. *Technometrics*, 4, 278-280.
- Schmitz, B. (1990). Univariate and multivariate time series models: The analysis of intraindividual variability and intraindividual relationships. In A. von Eye (Ed.), *Statistical Methods in longitudinal Research*, 351-386. Boston: Academic Press.
- Wilson, P.D., Hebel, J.R. y Sherwin, R. (1981). Screening and diagnosis when within-individual observations are Markov-dependent. *Biometrics* 37, 553-565.
- Wolfinger, R.D. (1996). Heterogeneous variance-covariance structures for repeated measurements. *Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics* 1, 205-230.